Методы дискретной оптимизации

Гамильтоновы пути и циклы. Пути, имеющие тип цикла и достаточные условия существования гамильтоновых путей и циклов в неориентированном графе. Теорема Поша

Основные понятия

Определение.

Цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз, называется гамильтоновым. Граф называется гамильтоновым, если в нем существует гамильтонов цикл.

Следствие 1 из определения. Гамильтонов граф двусвязен, т.е. удаление любого ребра графа не влечет потери связности графа. Отсюда следует альтернативное определение: гамильтонов граф – связный граф без шарниров.

Определение.

Тэта-граф – граф, все вершины которого за исключением двух несмежных, имеют степень 2, а указанные 2 вершины имеют степень 3.

Следствие 2 из определения. Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит тэта-подграф – задача для зачета!

Теорема Оре

Теорема 1 (Оре)

Пусть G – обыкновенный связный граф, содержащий n вершин, где $n > 2$. Если сумма степеней $d(v) + d(w) \geq n$ для любых двух различных несмежных вершин v и w графа G, то граф G гамильтонов.

Доказательство.

1. Прежде всего необходимо отметить: добавление любого ребра к графу, удовлетворяющему условиям теоремы, не может нарушить этих условий. Далее доказательство методом от противного.
2. Предположим, что теорема неверна, т.е. существует не гамильтонов граф, удовлетворяющий условиям теоремы. Последовательное добавление ребер к такому графу на каком-то шаге обязательно приведет к ситуации, когда добавление любого ребра делает граф гамильтоновым, поскольку таковым является полный граф. Поэтому далее будем предполагать, что G – критический, или максимальный для исходного графа по условиям теоремы граф: добавление любого ребра делает его гамильтоновым.

Теорема Оре

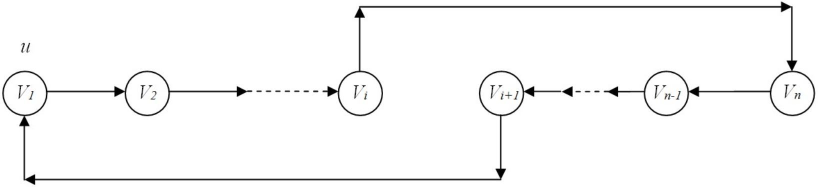
Продолжение.

2. В таком графе в силу связности для любой пары несмежных вершин u,v добавление ребра (u, v) означает появление гамильтонова цикла $u = v_1, v_2, ..., v_n = v, u$, которому ребро (u, v) должно принадлежать, поскольку его обратное удаление лишает граф свойства гамильтоновости. Это означает: ***в критическом графе любая пара его несмежных вершин соединима гамильтоновой цепью, в которой эти вершины являются концевыми***.

Теорема Оре

Завершение доказательства.

3. Возьмем произвольные несмежные вершины u и v графа G. По определению графа G, если к нему добавить ребро (u, v), появится гамильтонов цикл, содержащий это ребро. Значит, в G' есть (u, v)-цепь, содержащая все n вершин графа. Рассмотрим множество $S = \{i | u \text{ смежна с } v_{i+1}\}$ и множество $T = \{i | v \text{ смежна с } v_i\}$. В S имеется $d(u)$ элементов, а в T – $d(v)$ элементов, что в сумме дает $d(u) + d(v) > n$ элементов по условию теоремы. Все элементы множеств S и T являются числами 1 до $n - 1$, а значит, S и T имеют общий элемент (пусть это элемент i). Таким образом, в графе G' имеются ребра (u, v_{i+1}) и (v_i, v). Таким образом, в графе G' есть цикл $u \to v_2 \to \cdots \to v_i \to v \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to u$, проходящий по всем вершинам по одному разу, т. е. гамильтонов цикл (см. рисунок).



Теорема Дирака. Теорема Поша

Из теоремы Оре вытекает следующее, несколько более слабое, но очень простое для проверки достаточное условие гамильтоновости.

Теорема Дирака

Пусть G – обыкновенный связный граф, содержащий n вершин, где $n > 2$. Если степень $d(v) \geq \frac{n}{2}$ для всякой v – вершины графа G, то граф G гамильтонов.

Обозначим через $d_k(G)$ число вершин степени k в графе G.

Теорема Поша

Пусть связный граф $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 3$. При выполнении условий

$$n = 2m, k < m \Rightarrow \sum_{l \leq k} d_l(G) < k$$

$$n = 2m + 1, k < m \Rightarrow \sum_{l \leq k} d_l(G) < k, \sum_{l \leq m} d_l(G) \leq m$$

граф G гамильтонов.

Теорема Поша

Доказательство.

1. Прежде всего необходимо отметить: добавление любого ребра к графу, удовлетворяющему условиям теоремы, не может нарушить этих условий. Далее доказательство методом от противного.
2. Предположим, что теорема неверна, т.е. существует не гамильтонов граф, удовлетворяющий условиям теоремы. Последовательное добавление ребер к такому графу на каком-то шаге обязательно приведет к ситуации, когда добавление любого ребра делает граф гамильтоновым, поскольку таковым является полный граф. Поэтому далее будем предполагать, что G – критический, или максимальный для исходного графа по условиям теоремы граф: добавление любого ребра делает его гамильтоновым. В таком графе в силу связности для любой пары несмежных вершин u, v добавление ребра (u, v) означает появление гамильтонова цикла $u = v1, v2, \ldots, vn = v, u$, которому ребро (u, v) должно принадлежать, поскольку его обратное удаление лишает граф свойства гамильтоновости. Это означает: **в критическом графе любая пара его несмежных вершин соединима гамильтоновой цепью, в которой эти вершины являются концевыми.**

Теорема Поша

Доказательство.

3. Из п. 2 следует: если для пары вершин u, v справедливы неравенства $d(u) \geq \frac{n-1}{2}, d(v) > \frac{n-1}{2}$, то вершины u, v являются смежными. Непосредственно из данных неравенств следует, что $d(u) + d(v) \geq n - 1$ и если эти вершины не смежные, то добавление произвольного ребра в граф сделает вершины u, v смежными, а граф – гамильтоновым. Далее, для случая $n = 2m + 1$ рассмотрим ситуацию $d(u) > m, d(v) > m + 1$, а при $n = 2m$ соответственно $d(u) \geq m, d(v) \geq m$. Если вершины u, v не смежны, то существует гамильтонова цепь $= \{u = v_1, v_2, \dots, v_n = v\}$, соединяющая вершины u, v, для которых

$$d(u) = k \geq m, d(v) = p \geq \left[\begin{array}{c} m + 1, n = 2m + 1 \\ m, n = 2m \end{array} \right.$$

Теорема Поша

Продолжение.

3.1 Обозначим через $S(a)$ множество вершин, смежных с вершиной a, и через $S_{pr}(a)$ – множество вершин, предшествующих вершинам из $S(a)$ в цепи C: $v_i \in S(u) \Leftrightarrow v_{i-1} \in S_{pr}(u)$. Для любой вершины цепи C предшествующая ей вершина $v_{i-1} \in S_{pr}(u)$ не может принадлежать $S(v)$, поскольку в таком случае цикл
$H = \{u = v_1, v_2, \ldots, v_{i-2}, v_{i-1}, v_n = v, v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots v_i, v_1 = u\}$
гамильтонов, что противоречит предположению критичности G. Значит, вершина v не может быть смежной ни с одной из вершин множества $S_{pr}(u)$, в котором число элементов не менее $k \geq \frac{n-1}{2}$. Из предположения о степенях вершин u, v следует
$\frac{n-1}{2} < d(v) \leq n - 1 - k \Rightarrow k < \frac{n-1}{2}$. С другой стороны, значение
$k \geq \frac{n-1}{2}$. Полученное противоречие означает: любая пары вершин u, v, для которой $d(u) \geq \frac{n-1}{2}, d(v) > \frac{n-1}{2}$ является смежной. Поскольку граф G – не гамильтонов, то отсюда следует, что в графе G существует вершина $v : d(v) = k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} k \leq m, n = 2m+1 \\ k < m, n = 2m \end{array} \right.$

Теорема Поша

Продолжение.

4. Обозначим множество вершин степени не более $\frac{n-1}{2}$ через A, $B = V \setminus A$. Это означает, что степень вершины из множества не менее $m+1$ при $n = 2m+1$ и не менее m при $n = 2m$, т.е. не менее $\frac{n}{2}$.
5. Обозначим через q максимальную степень среди таких вершин. По условию теоремы значение $d_q(G)$ не более m при $q = m$ и менее m при $q < m$, поэтому вершин степени большей q не менее $m+1$ как в случае $n = 2m+1$, так и в случае $n = 2m$. Из условий теоремы это означает, что любая вершина множества A смежна с не более чем m другими вершинами в случае $n = 2m+1$ и с не более чем $m-1$ вершиной в случае $n = 2m+1$, т.е. степень вершины множества A меньше числа вершин в B. Поэтому для любой вершины u множества A существует вершина v из множества B, которая не смежна с u.

Теорема Поша

Окончание доказательства. Рассмотрим любую пару несмежных вершин

$$v_1 \in A, v_n \in B : d(v_1) = q, \left[\begin{array}{c} d(v_n) \geq m + 1, n = 2m + 1 \\ d(v_n) \geq m, n = 2m \end{array} \right.$$

и гамильтонову цепь $C = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, для которой указанные вершины являются концевыми. Повторение рассуждений п.3 приводит к выводу: в цепи существует q вершин, не смежных с последней вершиной v_n. Отсюда следует двойное неравенство $\frac{n}{2} \leq d(v_n) \leq n - 1 - q$, значит $q \leq \frac{n}{2} - 1 \Leftrightarrow q \leq m - 1$. Поскольку число вершин со степенями $q \leq m - 1$ меньше q, то хотя бы одна из вершин, предшествующим вершинам множества $S(v_1)$, имеет степень не менее $\frac{n}{2}$. Значит, существует пара несмежных вершин, степени которых не менее $\frac{n}{2}$. Это означает возврат к противоречию в 3 и завершает доказательство.